Mathematik

Abiturprüfung 2017

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

2 **a)** Geben Sie D_g und die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y-Achse an.

4 **b)** Beschreiben Sie, wie G_g schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $w: x \mapsto \sqrt{x}$ hervorgeht, und geben Sie die Wertemenge von g an.

2 Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

3 **b)** Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

3 Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die über ihrer maximalen Definitionsmenge die angegebenen Eigenschaften besitzt.

2 **a)** Der Graph der Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote.

2 **b)** Die Funktion g ist nicht konstant und es gilt $\int_0^2 g(x)\,dx = 0$.

4 An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

3 **a)** Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

2 **b)** Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\,\frac{1}{h}$ beträgt.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

3 **a)** Geben Sie D und die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.

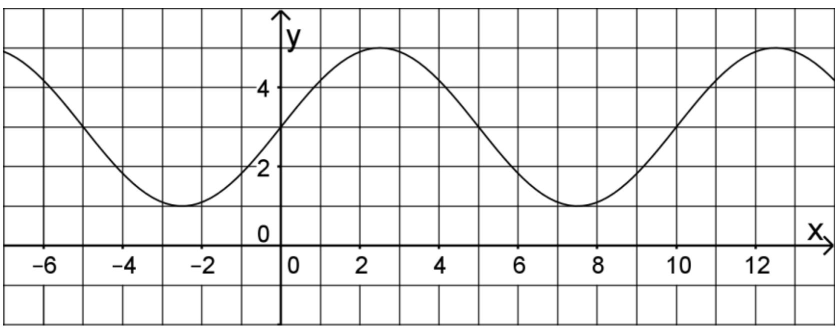
3 **b)** Zeigen Sie, dass $f(x)$ zum Term $x + 7 + \frac{16}{x-1}$ äquivalent ist, und geben Sie die Bedeutung der Geraden g mit der Gleichung $y = x + 7$ für G_f an.

2 Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

3 **b)** Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

3 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto p + q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$ mit $p, q, r \in \mathbb{N}$.



3 **a)** Geben Sie p, q und r an.

1 **b)** Der Graph der Funktion h geht aus dem Graphen der Funktion g durch Verschiebung um zwei Einheiten in positive x-Richtung hervor. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von h an.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden.

3 **a)** Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung.

2 **b)** Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30\,\frac{1}{h}$ beträgt.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

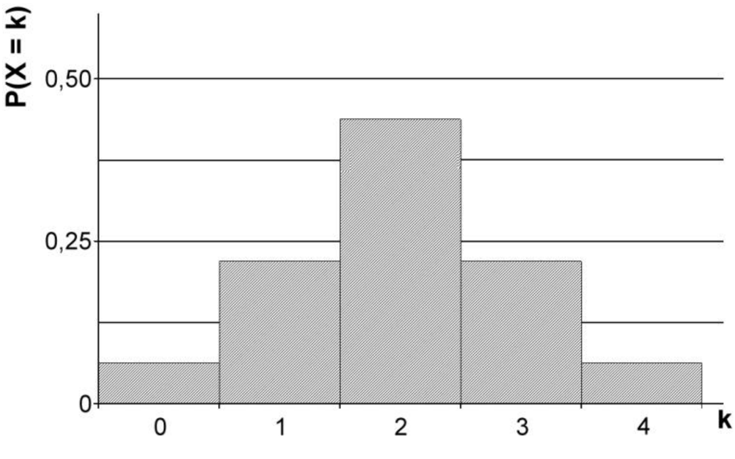
2 **a)** Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

1 **b)** Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

2 **c)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50%. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50% war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50% sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

2 **d)** Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

3 **2** In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0;1;2;3;4\}$ und dem Erwartungswert 2 dargestellt. Weisen Sie nach, dass es sich dabei nicht um eine Binomialverteilung handeln kann.



10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

3 **1 a)** Nebenstehende Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit den stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B. Tragen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.

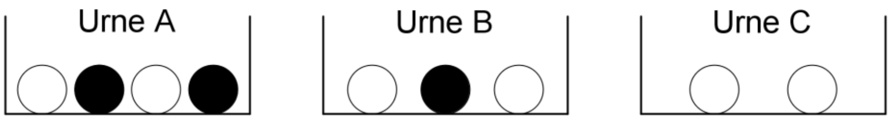
	A	$\overline{A}$	
B	0,12		
$\overline{B}$			
	0,3		

2 **b)** Im Vorfeld einer Wahl wird eine wahlberechtigte Person zufällig ausgewählt und befragt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

C: „Die Person ist älter als 50 Jahre."
D: „Die Person will die derzeitige Regierungspartei wählen."

Erläutern Sie, was in diesem Sachzusammenhang eine stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse C und D bedeuten würde.

2 Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



2 **a)** Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

3 **b)** Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

> Es wird zunächst ein Einsatz von 1 € eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die Punkte $A(2|1|-4)$, $B(6|1|-12)$ und $C(0|1|0)$.

3 **a)** Weisen Sie nach, dass der Punkt C auf der Geraden AB, nicht aber auf der Strecke $[AB]$ liegt.

2 **b)** Auf der Strecke $[AB]$ gibt es einen Punkt D, der von B dreimal so weit entfernt ist wie von A. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

2 Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

2 **a)** Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

3 **b)** Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die beiden bezüglich der x_1x_3-Ebene symmetrisch liegenden Punkte $A(2|3|1)$ und $B(2|-3|1)$ sowie der Punkt $C(0|2|0)$.

3 **a)** Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist.

2 **b)** Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punkts D der x_2-Achse an, so dass das Dreieck ABD bei D rechtwinklig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

2 **a)** Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

3 **b)** Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist.

10